绝密 ★ 考试结束前

全国2018年4月高等教育自学考试

复变函数与积分变换试题

课程代码:02199

请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

选择题部分

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

2. 每小题选出答案后,用2B铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题:本大题共12小题,每小题3分,共36分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的,请将其选出。

1. 设复数 $z=1-\mathrm{i}$,则 $\arg z=$

A. $-\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{3}{4}\pi$　　D. $\frac{5\pi}{4}$

2. 设 z 为非零复数,a,b 为实数且 $\frac{z}{\bar{z}}=a+b\mathrm{i}$,则 a^2+b^2

A. 等于0　　B. 等于1

C. 小于1　　D. 大于1

3. 函数 $f(z)=\bar{z}$ 在 $z=0$ 处

A. 解析　　B. 可导

C. 不连续　　D. 连续

4. 设 $z=x+\mathrm{i}y$,则下列函数为解析的是

A. $f(z)=x^2-y^2+\mathrm{i}2xy$　　B. $f(z)=x-\mathrm{i}y$

C. $f(z)=x+\mathrm{i}2y$　　D. $f(z)=2x+\mathrm{i}y$

5. 设C为正向圆周$|z|=1$，则$\oint_C \bar{z}\,\mathrm{d}z=$

A. $6\pi\mathrm{i}$　　B. $4\pi\mathrm{i}$　　C. $2\pi\mathrm{i}$　　D. 0

6. 设C为正向圆周$|z|=1$，则$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z(z-2)}=$

A. $-\pi\mathrm{i}$　　B. 0　　C. $\pi\mathrm{i}$　　D. $2\pi\mathrm{i}$

7. 设C_1, C_2分别是正向圆周$|z|=1$与$|z-2|=1$，则$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\oint_{C_1}\frac{\mathrm{e}^z}{z-2}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{\sin z}{z-2}\mathrm{d}z\right)=$

A. $2\pi\mathrm{i}$　　B. $\sin 2$　　C. 0　　D. $\cos 2$

8. 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+\mathrm{i})^n}z^n$的收敛半径为

A. 0　　B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

9. 点$z=0$是函数$f(z)=\frac{(\mathrm{e}^z-1)\sin z}{z^2(z-1)}$的

A. 本性奇点　　B. 一阶极点

C. 二阶极点　　D. 可去奇点

10. 已知$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$，则$\mathrm{Res}\left[\frac{\sin z}{z^4},0\right]=$

A. 1　　B. $\frac{1}{3!}$

C. $-\frac{1}{3!}$　　D. -1

11. 函数$w=\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$将上半平面$\mathrm{Im}\,z>0$映射成

A. $\mathrm{Im}\,w<0$　　B. $\mathrm{Im}\,w>0$

C. $|w|>1$　　D. $|w|<1$

12. 下列傅氏变换和逆变换中正确的是

A. $F[\delta(t)]=\mathrm{i}\omega$　　B. $F[1]=2\pi\delta(\omega)$

C. $F^{-1}[\delta(\omega)]=1$　　D. $F^{-1}[1]=u(t)$

非选择题部分

注意事项：

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上，不能答在试题卷上。

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。

13．复数 $-1+\mathrm{i}$ 的指数形式为__________.

14．若在区域 $x>0$ 内 $f(z)=a\ln(x^2+y^2)+\mathrm{i}\arctan\dfrac{y}{x}$ 为解析函数，则 $a=$__________.

15．函数 e^z 的基本周期为__________.

16．积分 $\int_1^2 2z\sin(z^2)\mathrm{d}z=$__________.

17．设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 的收敛半径为 4，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^{2n}$ 的收敛半径为__________.

三、计算题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

18．设 $f(z)=(y^3-3x^2y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$ 为解析函数，求 $v(x,y)$.

19．设 C 为正向圆周 $|z-2|=1$，求 $\oint_C \dfrac{1}{z(z-2)^2}\mathrm{d}z$.

20．设 C 为正向圆周 $|z|=2$，求 $\oint_C \dfrac{\sin z}{z^2+1}\mathrm{d}z$.

21．将 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域 $1<|z|<2$ 内展开为洛朗级数.

22．函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2-1)(z-\mathrm{i})}$ 在以 $z=1$ 为中心的哪几个圆环域内可展开为洛朗级数？

（不要求写出展开式）.

23．设 C 为正向圆周 $|z|=2$，求 $\oint_C \dfrac{1}{\cos z}\mathrm{d}z$.

四、综合题：本大题共 3 小题，共 19 分。

24．（本题 6 分）

设 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$.

（1）求 $f(z)$ 在上半平面的奇点；

（2）求 $f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}$ 在这些奇点处的留数；

（3）设 $\alpha>0$，计算 $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos\alpha x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

25.（本题 6 分）

设 D 为 z 平面上的区域 $0 < \operatorname{Im} z < \pi$，试求下列保形映射：

（1） $w_1 = f_1(z)$ 把 D 映射成 w_1 平面上的上半平面 $\operatorname{Im} w_1 > 0$；

（2） $w = f_2(w_1)$ 把 $\operatorname{Im} w_1 > 0$ 映射成 w 平面上的单位圆盘 $|w| < 1$；

（3） $w = f(z)$ 把 z 平面上的区域 D 映射成 w 平面上的单位圆盘 $|w| < 1$.

26.（本题 7 分）

利用拉氏变换解满足初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 的微分方程 $y''(t) + y(t) = \mathrm{e}^t$.